Абракітов В.Е. Математичний опис процесів випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку. // Восточно -европейский журнал передовых технологии. N 1/4(25) 2007. Харьков, 2007. - С. 47-54.

УДК 654.927, 654.928

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ПРОЦЕСІВ ВИПРОМІНЮВАННЯ ВИСОКОСФОКУСОВАНИХ ЗВУКОВИХ ХВИЛЬ ВУЗЬКОСПРЯМОВАНИМ ДЖЕРЕЛОМ ЗВУКУ

В.Е. Абракітов, к.т.н., доцент Харківської національної академії міського господарства

Анотація. Створена математична теорія, що описує фізичні процеси при випромінюванні високосфокусованої звукової хвилі. Розроблена модифікація методу розкладань, що зрощуються, для опису акустичного поля високосфокусованих джерел, у ліній ному наближенні дозволяє проводити дослідження просторової структури поля сильно сфокусованих випромінювачів (аж до кутів сходження в 180 ^{o}) і випромінювачів великої апертури, аж до розміру порядку ka = 1000. Чисельно досліджене акустичне поле сильне фокусуючих (з кутом сходження впритул до 180 °) і широкоапертурних (із хвильовим розміром аж до ka = 1000) увігнутих джерел (у вигляді акустичного лазера [1]). Показано, що традиційно використовуване наближення інтеграла Релея дає помітну помилку на осі симетрії джерела й в області простору, куди попадають хвилі, перевідбиті від випромінюючої поверхні. Отримано аналітичне вираження границі цієї області – каустики, утвореної променями, що відповідають однократному відбиттю крайової хвилі від поверхні джерела.

Ключові слова: акустичний лазер, сазер, винахід, випромінювач, когерентне випромінювання, акустична безпека.

Абракітов В.Е. Математичний опис процесів випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку. // Восточно -европейский журнал передовых технологии. N 1/4(25) 2007. Харьков, 2007. - С. 47-54.

Актуальність проблеми опису процесів випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку

З точки зору проблем акустичної безпеки населення велике значення мають процеси випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку. Прикладами таких випромінювачів, що широко застосовуються в промисловості, медицині та ін. галузях, є акустичні джерела в різноманітних пристроях ультразвукової дефектоскопії, ультразвукової діагностики в медицині (широко відоме «УЗИ»), та ін. Детальний математичних опис тих процесів дозволяє забезпечити необхідні заходи для боротьби із їхніми побічними явищами при їх дії (що складаються в випромінюванні надвеликої кількості енергії – ультразвук, як відомо, застосовують навіть для обробки металів, і випадкове попадання пучка випромінювання на тіло людини може привести до дуже важких наслідків). Тому методика таких акустичних розрахунків характеризується великою актуальністю з точки зору забезпечення належного рівню безпеки.

Акустичний лазер – типовий приклад вузькоспрямованого джерела звуку

В 1997 р. автором розроблений та запропонований акустичний лазер, що представляє собою високосфокусований акустичний випромінювач когерентних монохроматичних звукових хвиль (ультразвукової частоти) [1, 2]. Цей пристрій представлений на рис. 1.

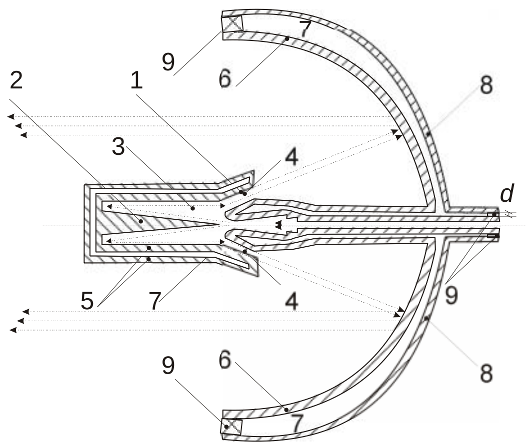

Рис.1. Акустичний лазер Абракітова В.Е. [1, 2]:
1-4 – випромінювач акустичного сигналу дискретної частоти (в складі):
1 - сопло; 2 - клин усередині резонансної камери (3); 3 - резонансна камера; 4 - резонансні патрубки (у вигляді трубок); (елементи 1 - 4 утворюють внутрішню стінку звукоізолюючого боксу);
5-9 – звукоізолюючий бокс (в складі): 5 - зовнішня стінка боксу, віднесена до випромінювача акустичного сигналу; 6 - внутрішня стінка рефлектора, виконується у формі копараболоїду з матеріалу з низьким коефіцієнтом звукопоглинання α; 7 - вакуумований простір (середній вакуум з дотриманням умови $l \geq d$); 8 - зовнішня стінка рефлектора, виконана довільної форми з матеріалу з високим коефіцієнтом звукопоглинання α; 9 - пружна прокладка, що герметизує (вакуумна гума).

Створення акустичних лазерів являє собою принципово новий напрямок в техніці, тому що до винаходу [1, 2] нікому ще не вдавалося получити технічний результат, еквівалентний технічному результату задля відомого світлового лазеру: можливість вузькоспрямованого (кут випромінювання прагне до нуля) надпотужного когерентного (монохроматичного) випромінювання звукових (але не світлових) хвиль. Можливість максимальної концентрації звукової енергії має певні переваги перед можливістю максимальної концентрації світлової енергії в плані використання пропонованих акустичних лазерів.

Ідея створення акустичних лазерів пройшла весь багатостраждальний шлях - від категоричного неприйняття: (Наводимо цитату з публікації в Інтернет, що начисто заперечує їхнє існування: «…Ниже приводятся основные научные результаты, полученные сотрудниками ЛВП… Очевидно, что нелинейные акустические явления возникают только тогда, когда интенсивность звука достаточно велика. Но если в оптике большую интенсивность света можно получить с помощью лазеров, то в акустике это невозможно, поскольку «акустических лазеров» не существует…» [http://www.vsu.ru/dept/science/scidept/labs/03/ Воронежский государственный университет - Наука. Лаборатория волновых процессов института общей физики РАН]. З патентним пошуком у Воронезькому державному університеті - справа явно погана?) - до найширшої зацікавленості в ній наукової громадськості.

Підсумком таких метаморфоз є, наприклад, публікація в Інтернет, представлена за веб -адресою [http://nkj.ru/news/5584/ Акустический лазер | Новости и события | Журнал "Наука и Жизнь".]: «Дата: 10.07.2006. *Группа исследователей из Великобритании и Украины создали новый тип усилителя - генератора акустической волны сверхвысокой частоты - аналог светового лазера…*»

До речі, британці придумали для цього пристрою нову назву "сазер" - (sazer (англ. “Sound Amplification by Stimulated Emission of Radiation”)).

Потихеньку питання створення акустичних лазерів (сазерів) проникнули в плани перспективних дослідницьких робіт солідних наукових організацій й в інших країнах колишнього СРСР.

...Взагалі особливий науковий інтерес викликають теоретичні питання, пов'язані з математичним описом фізичних процесів, що відбуваються при випромінюванні високофокусованих когерентних звукових хвиль. Спроби створити подібний опис мали місце й раніше, але були чисто умовними: (як випромінювачі високофокусованих когерентних звукових хвиль приймався не {просто не існуючий тоді ще} "сазер", а якісь інші, тодішні пристрої: випромінювачі звичайного типу, у яких цей ефект виражений у набагато меншому ступені). Можливість (і нагальна потреба) створити таку **повноцінну** теорію з'явилася лише у зв'язку зі створенням звукових лазерів.

Автором на правах першопрохідника, першовідкривача цього знаменного досягнення сучасної науки й техніки створена така теорія. Вона застосовувана як до випромінювання сазерів, так і до інших вискосфокусованих акустичних приладів.

Постановка завдання теоретичних досліджень

Акустичний лазер за час, що пройшов з моменту його винаходу, порівняно непогано описаний у науковій літературі [3, 4] і мережі Інтернет [6, 7], однак до цього дня не існувало математичної моделі опису фізичних процесів, що відбуваються в процесі його роботи. Затверджувати про деклароване патентом "високофокусоване випромінювання когерентних монохроматичних звукових хвиль" можливо було тільки на базі оглядових теоретичних передумов (технічний опис винаходу в патентному документі [1]) і даних безпосередніх емпіричних спостережень. Питання ж теоретичного обґрунтування його принципу дії зажадало додаткових наукових досліджень, які були проведені в період 1997 -2006 р., і викладаються нижче. Мова йде про акустичне поле джерела, що сильно фокусує, при обліку дифракції на ввігнутій випромінюючій поверхні. При визначених конструкцією кутах фокусування навіть лінійна теорія опису акустичного поля не має точного аналітичного рішення. Зокрема, це пов'язане з тим, що завдання сильно ускладнюється ефектом дифракції на скривленій поверхні випромінювача або акустичної лінзи. У більшості практичних випадків для опису поля використають інтеграл Релею, що є точним рішенням відповідного дифракційного завдання в лінійному наближенні для випадку плоскої випромінюючої поверхні.

Таке подання еквівалентно принципу Гюйгенса-Френеля, що розглядає поле протяжного джерела як інтерференцію сферичних хвиль, створюваних елементарними крапковими джерелами, розташованими на випромінюючій поверхні. Таким чином, інтеграл Релея не враховує вторинні хвилі, що виникають у результаті багаторазових перевідбиттів елементарних хвиль від скривленої поверхні випромінювача. Для адекватного рішення завдання з урахуванням дифракції на ввігнутій поверхні можна використати метод розкладань, що зрощують, запропонований Кулувра [9]. Однак у своєму первісному виді, описаному в оригінальній роботі, він має обмеження як на величину максимального розміру апертури, так і на значення кута фокусування випромінювача. Однак теорія, використовувана в роботі [9], не має явно виражених обмежень на згадані вище параметри системи, або ж вони мають чисельний характер.

У роботі, що представляється, пропонуються модифікації методу розкладань, що зрощують, що дозволяють сильно розширити область його застосування. У свою чергу, це дає можливість краще зрозуміти зміни в структурі акустичного поля, пов'язані з багаторазовим перевідбиттям випромінюваної хвилі самою поверхнею протяжного джерела.

Математичний опис процесів випромінювання вузько спрямованого джерела звуку

Розглянемо геометрію завдання, схематично п редставлену на рис. 2. Нехай осесиметрична сферична чаша Γ_S, вмонтована в нескінченний твердий екран Γ_B, (тобто випромінювач пристрою [1]) коливається за законом $exp(-i\ \omega t)$.
Позначимо буквами a, f та F відповідно радіус апертури, радіус кривизни й центр кривизни. Крапку спостереження M будемо характеризувати сферичними координатами r та Θ с початком координат O у точці перетинання площини екрана й осі симетрії джерела. Будемо вважати, що в півпросторі праворуч від випромінюючої поверхні перебуває однорідне середовище, у якому можна зневажити акустичними втратами. Тоді звукове поле в лінійному наближенні описується рівнянням Гельмгольця $\Delta p + k^2 p = 0$, з урахуванням умови випромінювання Зоммерфельда на нес кінченності й граничних умовах $\partial p/\partial n = ik\rho_0 c_0 u$ на випромінюючій поверхні, Γ_S, та $0 = \partial p/\partial n$ на поверхні екрана, Γ_B. Тут, p – амплітуда акустичного тиску, $k = \omega/c_0$ – хвильове число, ω - кругова частота, ρ_0 – щільність середовища й c_0– швидкість звуку в середовищі, u – амплітуда нормального компонента швидкості випромінюючої поверхні, передбачається, що нормаль спрямована убік середовища.

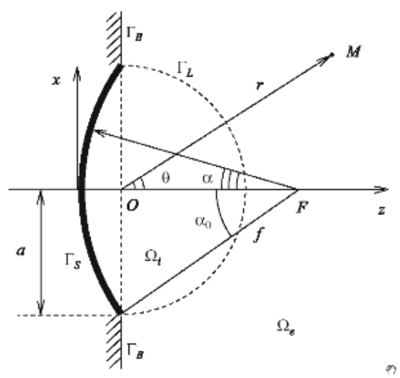

Рис. 2. Геометрична постановка завдання.

Уведемо додаткову півсферу Γ_L радіусу а с центром у точці О. Ця поверхня відокремлює внутрішню область, Ω_i, від зовнішньої, Ω_e. Тепер позначимо акустичне поле усередині отриманих доменів через p_i та p_e відповідно. Тоді вихідне завдання розбивається на два:

$$\Delta pi + k^2 p_i = 0, \tag{1.а}$$

$$\left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_S} = ik\rho_0 c_0 u, \tag{1.б}$$

$$\Delta p_e + k^2 p_e = 0, \tag{2.а}$$

$$\left.\frac{\partial p_e}{\partial n}\right|_{\Gamma_B} = 0 \tag{2.б}$$

Ці два завдання зв'язані між собою умовами безперервності тиску й нормальної швидкості на поділяючій поверхні Γ_L:

$$p_i|\,\Gamma_L = p_e|\,\Gamma_L, \tag{3.а}$$

$$\left.\frac{\partial p_i}{\partial n}\right|_{\Gamma_L} = \left.\frac{\partial p_e}{\partial n}\right|_{\Gamma_L}\ . \tag{3.б}$$

Абракітов В.Е. Математичний опис процесів випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку. // Восточно -европейский журнал передовых технологии. N 1/4(25) 2007. Харьков, 2007. - С. 47-54.

Відповідно роботі [9], представимо загальне рішення рівнянь (1) та (2) у вигляді розкладань по сферичних функціях::

$$p_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\xi_n P_n(\cos\theta)\, j_n(kr) + \nu_n P_n(\cos\theta)\, y_n(kr)\right] \quad (4)$$

$$p_e = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\chi_n P_n(\cos\theta) h_n^{(1)}(kr) + k_n P_n(\cos\theta) h_n^{(2)}(kr)\right]. \quad (5)$$

де ξ_n , ν_n , χ_n та κ_n – коефіцієнти розкладань, обумовлені граничними умовами (1.б), (2.б), і умовами безперервності (3), P_n – поліноми Лежандра, j_n , y_n - сферичні функції Бесселя й Неймана порядку n відповідно; $h^{(1)}{}_n = j_n + i\, y_n$ і $h^{(2)}{}_n = j_n - i\, y_n$ - сферичні функції Ханкеля першого й другого роду також порядку n. Беручи до уваги кінцеві величини акустичного тиску на початку координат (точці O) і умову випромінювання Зоммерфельда, одержуємо:

$$p_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\xi_n P_n(\cos\theta)\, j_n(kr) \quad (r \le a), \qquad (6)$$

$$p_e = \sum_{n=0}^{+\infty}\left[\chi_n P_n(\cos\theta) h_n^{(1)}(kr)\right] \quad (r \ge a), \qquad (7)$$

Відзначимо, що правочинність використання у внутрішній області Ω розкладання (6) неочевидна, оскільки обмежуюча поверхня не є сферою й рішення вигляду (6), загалом кажучи, може не задовольнити граничній умові. Підбадьорюючим є той факт, що в граничному вип адку нульової кривизни розглянутий підхід дає прекрасний збіг з наявним точним аналітичним рішенням [9]. У більше загальному випадку можливість використання рішення у вигляді (6) вимагає спеціального теоретичного дослідження, що, саме по собі, є непростим завданням [10]. Однак існує й прямий спосіб перевірки: якщо при чисельному моделюванні після знаходження коефіцієнтів ξn розкладання (6) з високою точністю відновлює граничні умови, те, відповідно до теореми існування й одиничності для рівняння Гельмголь ца, знайдене розкладання є шуканим рішенням завдання. Забігаючи вперед, відзначимо, що в отриманих рішеннях гранична умова дійсно відновлювалася з високою точністю (див. рис. 4).

Підставляючи (7) у граничну умову (2.б) і використовуючи властивості поліном ів Лежандра, одержуємо:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma_B} = -\frac{1}{r}\sum_{n=0}^{+\infty}\chi_n P_n'(0) h_n^{(1)}(kr) = -\frac{1}{r}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\chi_{2n+1}\frac{(-1)^n(2n+1)!}{2^{2n}(n!)^2} h_{2n+1}^{(1)}(kr) \qquad (8)$$

Звідси випливає, що всі непарні коефіцієнти в (5) дорівнюють нулю. Таким чином,

$$p_e = \sum_{n=0}^{+\infty}\eta_n P_{2n}(\cos\theta) h_{2n}^{(1)}(kr) \qquad (r \ge a). \qquad (9)$$

Умови зшивки (3) з врахуванням (6) і (9) приймають вигляд:

$$f_1(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty}\xi_n P_n(\cos\theta)\, j_n(ka) \; -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty}\eta_n P_n(\cos\theta) h_{2n}^{(1)}(ka) = 0\,, \qquad (10.a)$$

Абракітов В.Е. Математичний опис процесів випромінювання високосфокусованих звукових хвиль вузькоспрямованим джерелом звуку. // Восточно -европейский журнал передовых технологии. N 1/4(25) 2007. Харьков, 2007. - С. 47-54.

$$f_2(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n P_n(\cos\theta)\, j'_n(ka) -$$

$$- \sum_{n=0}^{+\infty} \eta_n P_{2n}(\cos\theta) h_{2n}^{(1)}(ka) = 0, \qquad (10.б)$$

де уведені допоміжні функції кута θ $f_1(\cos\theta)$ та θ $f_2(\cos\theta)$. Кожна з них може бути формально розкладена в ряд по поліномах Лежандра, тобто рівність цих функцій нулю означає рівність нулю всіх коефіцієнтів розкладання. Тому умови (10) можуть бути записані у вигляді наступних співвідношень:

$$\int_0^{\pi/2} f_1(\cos\theta) P_{2n}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta, \qquad (11.а)$$

$$\int_0^{\pi/2} f_2(\cos\theta) P_{2n}(\cos\theta) \sin\theta\, d\theta, \qquad (11.б)$$

де n – натуральне число.

Як показано в роботі [9] на основі використання властивостей поліномів Лежандра, співвідношення (11) дають зв'язок між коефіцієнтами зовнішнього й внутрішнього розкладань і дозволяють виразити величини η_n через ξ_n:

$$\eta_n = \frac{1}{h_{2n}^{(1)}(ka)} \Big(\xi_{2n} j_{2n}(ka) +$$

$$+ (4n+1) \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_{2m+1} j_{2m+1}(ka) I_{m,n} \Big), \qquad (12.а)$$

$$\eta_n = \frac{1}{h_{2n}^{(1)}{}'(ka)} \Big(\xi_{2n} j'_{2n}(ka) + +(4n+1) \sum_{m=0}^{+\infty} \xi_{2m+1} j'_{2m+1}(ka) I_{m,n} \Big), \qquad (12.б)$$

де

$$I_{m,n} = \int_1^0 P_{2m+1}(x) P_{2n}(x)\, dx = \frac{(2m+1)P_{2m}(0)P_{2n}(0)}{(2m+1)(2m+2)-2n(2n+1)}. \qquad (12.в)$$

Підставляючи (12.а) в (12.б) одержуємо, що всі парні коефіцієнти внутрішнього розкладання ξ_{2n}. легко представляються у вигляді нескінченної комбінації непарних ξ_{2n+1}:

$$\xi_{2n} = i(4n+1)(ka)^2 \sum_{x=0}^{\infty} \left[j_{2m+1}(ka) h_{2n}^{(1)}{}'(ka) - j'_{2m+1}(ka) h_{2n}^{(1)}(ka) \right] *$$

$$* \xi_{2m+1} I_{m,n} \qquad (13.а)$$

Умови зшивки у вигляді (13.а) задають лише частину рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладання ξ_n. Повна система рівнянь виходить, коли до системи (13.а) додаються рівняння, що виходять із граничної умови (1.б) з урахуванням подання (6) для нескінченної кількості крапок на випромінюючій поверхні Γ_S:

$$\frac{\partial}{\partial n} \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n P_n(\cos\theta) j_n(\mathrm{kr}) \right\} \Bigg|_{\Gamma_S} = ik\rho_0 c_0 u \quad (13.б)$$

Таким чином, формули (13) визначають нескінченну систему лінійних рівнянь щодо невідомих коефіцієнтів розкладання n.. Щоб зробити систему рівнянь (13) кінцевою, при розрахунках доводиться обмежувати кількість членів у розкладаннях (6) і (9), утримуючи тільки перші NB членів внутрішнього розкладання й NA - зовнішнього, сподіваючись на досить швидку збіжність відповідних рядів. При цьому NA рівнянь відносно NB невідомих (NB>NA) виходять із умов зшивки, а відсутні NP = NB - NA з виписуються із граничної умови, дискретизованої у відповідній кількості крапок випромінюючої поверхні. Таку систему рівнянь можна записати в матричній формі:

$$A \cdot X = B \,, \qquad (14)$$

де X - це вектор-стовпець, що містить коефіцієнти внутрішнього розкладання:

$$X_n = \xi_{n-1}, \qquad (15)$$

а B - вектор-стовпець, перші NP елементів якого описують розподіл швидкості по випромінюючій поверхні Γ_S, а інші дорівнюють нулю:

$$\mathrm{B_m} = \begin{cases} i\rho_0 c_0 u_0(\alpha_m), & 1 \le m \le NP \\ 0, & NP \le m \le NB \end{cases}, \qquad (16)$$

де кут α_m (див. кут α на рис. 2) задає положення m-ої точки на сферичної випромінюючої поверхні, і легко визначає сферичні координати точки r_m и θ_m (див. рис. 2):

$$r_\mathrm{m} = f\sqrt{1+\cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha_0\cos\alpha_m}\,,$$
$$\sin\theta_m = \sin\alpha_\mathrm{m} \,/\, \sqrt{1+\cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha_0\cos\alpha_m}$$
$$\cos\theta_m = (\cos\alpha_0 - \cos\alpha_\mathrm{m}) \,/\, \sqrt{1+\cos^2\alpha_0 - 2\cos\alpha_0\cos\alpha_m}\,.$$
$$0 \le \alpha_\mathrm{m} \le \alpha_0,\ (1 \le m \le \mathrm{NP}) \qquad (17)$$

Через α_0 тут і далі позначений кут фокусування випромінювача, тобто напівкут сходження (див. рис. 2). При цьому нормальна похідна на випромінюючій поверхні пов'язана з похідної по сферичних координатах у такий спосіб:

$$\left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_\mathrm{m} = -\left.\frac{\partial p}{\partial r}\right|_\mathrm{m} \cos(\theta_\mathrm{m}+\alpha_\mathrm{m}) + \frac{1}{\mathrm{r}}\left.\frac{\partial p}{\partial \theta}\right|_\mathrm{m} \sin(\theta_\mathrm{m}+\alpha_\mathrm{m}). \qquad (18)$$

Матриця A є повною, несиметричною й комплексною. Перші NP рядків пов'язані з дискретізованими граничними умовами на випромінюючій поверхні. Тут матричні елементи $\mathrm{A_{m,n}}$ задаються у вигляді:

$$\mathrm{A_{m,n}} = P_{n-1}(\cos\theta_\mathrm{m})\, j'_{n-1}(kr_m) \cos(\theta_\mathrm{m}+\alpha_\mathrm{m}) + P'_{n-1}(\cos\theta_\mathrm{m})\, j_{n-1}(kr_m) \sin(\theta_\mathrm{m}+\alpha_\mathrm{m}) \sin(\theta_\mathrm{m}) / kr_m.$$

$$1 \le m \le NP,\ 1 \le n \le NB \qquad (19)$$

Наступні NA рядків задаються умовами зшивки (13):

$$A_{m+NP,n} = [j_{2p-1}(ka) h'^{(1)}_{2(m-1)}(ka) - j'_{2p-1}(ka) h^{(1)}_{2(m-1)}(ka)] I_{p-1,m-1},$$

$$1 \le m \le NA,\ 1 \le n \le NB,\ n = 2p \qquad (20.а)$$

$$A_{m+NP,n} = \frac{i\delta_{mp}}{(4m-3)(ka)^2}\,,$$

$$1 \le m \le NA,\ 1 \le n \le NB,\ n = 2p-1 \qquad (20.б)$$

Тут δ_{mp} - символ Кронекера. Якщо на випромінюючій поверхні задається не нормальна швидкість, а тиск p_0, те замість співвідношення (18) варто писати:

$$A_{m,n} = P_{n-1}(\cos\theta_m)j_{n-1}(kr_m),$$

$$B_m = p_0(\alpha_m), \qquad (21)$$

$1 \le m \le$ NP, $1 \le n \le$ NB

Необхідні функції Бесселя й Неймана можуть бути розраховані з використанням рекурентних співвідношень (див. далі). Завдання в підсумку зведуться до чисельного рішення кінцевої системи лінійних рівнянь описаної нижче, що може бути зроблено стандартними чисельними методами. Відомо, що функції Бесселя й Неймана високих порядків мають наступні асимптотики [11]:

$$j_n(\zeta)\sim[4\zeta(n+1/2)]-1/2[e\zeta/2(n+1/2)]^n+1/2, \qquad (22.а)$$

$$y_n(\zeta)\sim -[\zeta(n+1/2)]-1/2[e\zeta/2(n+1/2)]-^{(n}+1/2). \qquad (22.б)$$

Як видно, у міру збільшення порядку $n > e\zeta/2$, особливо при більших ζ (у розглянутому завданні $ka \sim \zeta$), функції Бесселя стають дуже маленькими, а функції Неймана - дуже більшими. У зв'язку із цим знижується точність рішення системи лінійних рівнянь, оскільки базисні функц ії виявляються істотно різних порядків по амплітуді, а, отже, деяка частка членів ряду має вигляд добутку дуже великої величини на дуже маленьку - й, як наслідок, розраховується недостатньо точно. Чим вище порядок використовуваних функцій, тим сильніше по амплітуді вони відрізняються від приблизно рівній одиниці амплітуди функцій низьких порядків. Тому занадто велике значення величини NB приведе до значних помилок і робить неможливим чисельне моделювання. З іншого боку, метод припускає використання сферичних функцій Бесселя й Неймана аж до дуже високих порядків, щоб помилка обчислень, пов'язана з обривом рядів (6)-(9), була мала. Таким чином, існує деяке оптимальне значення NB. Розрахунки показали, що гарні результати виходять при NB $\approx$ (2-3)ka. Звідси видно, що застосовність методу утруднена для випромінювачів з більшим хвильовим розміром ka. Дійсно, при цьому збільшується максимальний порядок використовуваних функцій Бесселя й Неймана й, у відповідність із асимптотичними властивостями (22), значення функцій досягають комп'ютерного нуля або нескінченності при номерах менших необхідного значення (2 -3)ka.

Щоб обійти зазначені труднощі, у розкладаннях (6) і (9) використалися спеціальним образом перенормовані функції Бесселя й Ханкеля, близькі по амплітуді до оди ниці:

$$p_{\text{i}} = \sum_{n=0}^{NB} \xi_{jn} P_n(\cos\theta)\,\bar{j}_n(kr), \qquad (23)$$

$$p_{\text{e}} = \sum_{n=0}^{NA} \eta_n P_{2n}(\cos\theta)\,\bar{h}^{(1)}_{2n}(kr). \qquad (24)$$

Тут для спрощення запису для коефіцієнтів розкладань знову вживаються позначення ξ_ν та η_n, хоча їхні значення відрізняються від значень відповідних коефіцієнтів у формулах (6) і (9). Нові базисні функції виходять у результаті наступної нормування вихідних функцій:

$$\bar{j}_n(\zeta)=j_n(\zeta)\exp(-\varepsilon_n), \qquad (25)$$

$$\bar{y}_n(\zeta)=y_n(\zeta)\exp(\varepsilon_n), \qquad (26)$$

$$\bar{h}_n^{(1)}(\zeta)= \bar{j}_n(\zeta)\exp(-2\varepsilon_n) + i\,\bar{y}_n(\zeta), \qquad (27)$$

Тут нормувальні експонентні показники ε_n не залежать від ζ, а їхня величина помітно менше комп'ютерної нескінченності. Розрахунок коефіцієнтів ε_n і нормованих функцій пояснений далі. Використання розкладань (23) і (24) дозволяє істотно розширити область завдання значень радіуса апертури ($ka \sim 10^3$) , не виходячи за рамки машинного нуля або машинної нескінченності, що існують для обраної точності обчислень.

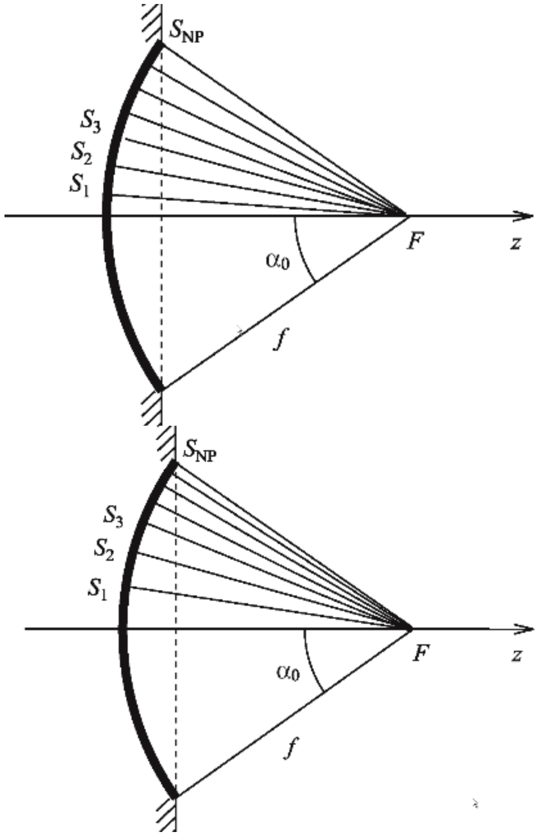

Рис. 3. Ілюстрація рівномірного (а) і нерівномірного (б) розподілу точок, у яких задається амплітуда нормальної швидкості випромінюючої поверхні

Інше вдосконалення методу складалося у використанні нерівномірного просторового розподілу точок, у яких задавалася нормальна швидкість випромінюючої поверхні Γ_S. Як згадувалося вище, частина рівнянь у розв'язуваній системі визначається граничними умовами в NP крапках поверхні Γ_S. Чисельне дослідження показало, що характер розподілу крапок уздовж випромінюючої поверхні сильно впливає на точність відновлення граничних умов, а, отже, і на точність самого методу. Більше точні результати вийшли при використанні, замість еквидістантного розподілу по куту розподілу крапок дискретизації (рис. 3.а), що був запропонований Кулувра в роботі [9], - розподілу з більшими кроками дискретизації вдалині від краю випромінювача й дрібними - поблизу краю (рис. 3.б). Такий нерівномірний розподіл дозволяє краще описати різку зміну акустичного поля поблизу краю джерела.

Сферичні функції Бесселя й Неймана і їхні похідні можуть бути розраховані по відомим рекурентних співвідношеннях [12]:

$$s_n(\zeta)=\frac{2n-1}{\zeta}\, s_{n-1}(\zeta)-s_{n-2}(\zeta) \qquad (28)$$

$$s'_n(\zeta)=s_{n-1}(\zeta)-\frac{n+1}{\zeta}\, s_n(\zeta) \qquad (29)$$

де s_n - умовне позначення одного з видів сферичних функцій, ζ – аргумент відповідної функції. Рекурентна процедура (27) використає відомі вираження для функцій 0 -го й 1-го порядків:

$$j_0(\zeta)=\frac{\sin\zeta}{\zeta}, \qquad (30.а)$$

$$j_1(\zeta)=-j'_0(\zeta)=-\frac{\cos\zeta}{\zeta}+\frac{\sin\zeta}{\zeta^2}, \qquad (30.б)$$

$$y_0(\zeta)=-\frac{\cos\zeta}{\zeta}, \qquad (30.в)$$

$$y_1(\zeta)=-y'_0(\zeta)=-\frac{\sin\zeta}{\zeta}-\frac{\cos\zeta}{\zeta^2}. \qquad (30.г)$$

Процедура (28) є стійкою для функцій Неймана будь -якого порядку й функцій Бесселя порядку $n \le \zeta$. Функції Бесселя порядків $n \ge \zeta$ перебувають за допомогою зворотних рекурентних співвідношень [13]:

$$j_n(\zeta) = \frac{2n+3}{\zeta}\, j_{n+1}(\zeta) - j_{n+2}(\zeta). \qquad (31)$$

Для запуску процедури (31) с деякого номера N необхідно мати значення функцій $j_{N+2}(\zeta)$ та $j_{N+1}(\zeta)$,які заздалегідь невідомі. Однак рекурентний алгоритм (31) досить швидко виходить на галузь, що відповідає функціям Бесселя, тобто конкретні значення стартових функцій $S_{N+2}(\zeta)$ та $S_{N+1}(\zeta)$не важливі. Наприклад, їх можна вибрати рівними 0 й 1 відповідно, а сам номер N вибрати істотно, на кілька сотень, що перевищують найбільше з необхідних значень номера n. Рекурентна процедура (31) при цьому визначає функції Бесселя з точністю до деякого не відомого множника: $\bar{j}_n(\zeta)=\chi\, j_n(\zeta)$.

Зі зменшенням номера n значення функцій $\bar{j}_n$ надзвичайно швидко наростають (див. асимптотику (22.а)) і, загалом кажучи, можуть наблизитися до величини комп'ютерної нескінченності. Тому доцільно при деяких значеннях номера $n = n_m$ $(m=1,2,\ldots M)$ проводити їх перенормування. Для цього для функцій $\bar{j}_n$ з номерами $n_m \le n < n_{m+1}$ уводиться свій коефіцієнт $\chi_m=\chi\mu_1\mu_2\ldots\mu_n$, тобто функції перевизначаються як

$$\tilde{j}(\zeta)=\chi_m \cdot j_n(\zeta).$$

Множник μ_m, утримуваний у пам'яті комп'ютера, вибирається таким, щоб значення n_m-ої функції дорівнювало одиниці:

$$\tilde{j}(\zeta)=1.$$

Значення коефіцієнта χ визначається з вимоги, щоб пряма й зворотна рекурентні процедури да вали те саме значення функції Бесселя порядку $n \approx \varepsilon$. Остаточно, щирі значення функцій Бесселя високих порядків розраховуються зворотної перенормуванням знайдених функцій $\bar{j}_n$ із номерами $n_m \le n < n_{m-1}$:

$$j_n(\zeta) = \tilde{j}(\zeta) / \chi_m = \tilde{j}(\zeta) / (\chi\mu_1\, \mu_2\ldots\, \mu_m). \qquad (32)$$

Після цього знаходять похідні функцій по рекурентним співвідношенням (29). Таким чином, сферичні функції Бесселя й Неймана і їхні похідні всіх необхідних порядків виявляються відомими.

У розглянутому завданні зручно проводити нормування використовуваних сферичних функцій Бесселя й Ханкеля, виходячи з функцій Бесселя аргументу $ka=\zeta$, тобто , наприклад, на границі внутрішньої області $r \approx a$. У цьому випадку в необхідному діапазоні значень аргум енту ζ нові функції будуть і не занадто малі, і не занадто великі. Для введення множників, що нормують ε_n: $0 = \varepsilon_n$ при $n < ka$ та $\varepsilon_n=-\ln[j_n(ka)]$ при $n \ge ka$, можна використати асимптотику (22), однак виявилося доцільніше ґрунтуватися на рекурентних співвідношеннях, що випливають із відповідних співвідношень для сферичних функцій Бесселя (див. вище). При цьому для розрахунку $\varepsilon_n=-\ln[j_n(ka)]$ функції $j_n(ka)$ не обчислюються явно, а використаються логарифми допоміжних коефіцієнтів χ, μ_1, ... μ_m, і функцій $\bar{j}_n(ka)$:

$\varepsilon_n=\ln(\chi)+\ln(\mu_1)+\ln(\mu_2)+\ldots+\ln(\mu_m)-\ln(\bar{j}_n(ka))$. (33)

Описана процедура дозволяє уникнути використання більших чисел, тобто обійти проблему машинної нескінченності. Щоб розрахувати значення нормованих сферичних функцій Бесселя дові льного аргументу порядку $n<\zeta$, використаються видозмінені прямі рекурентні співвідношення:

$$\bar{j}_n(\zeta)=\frac{2n-1}{\zeta}\cdot\bar{j}_{n-1}(\zeta)\exp(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})-$$

$$-\bar{j}_{n-2}(\zeta)\exp(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-2}). \qquad (34)$$

Нормовані функції Бесселя порядків $n\geq\zeta$. перебувають за допомогою процедури зворотного рекурентного рахунку, описаної вище, але запам'ятовуються не функції j_n, а функції $\bar{j}_n$ й логарифми $\varepsilon_n=\ln(\chi_m)$ коефіцієнтів χ_m, де $n_m\leq n<n_{m-1}$. Потім проводиться необхідна перенормування

$$\bar{j}_n(\zeta)=\tilde{j}(\zeta)\exp(\tilde{\varepsilon}-\varepsilon_n). \qquad (35)$$

Похідні нормованих функцій Бесселя розраховуються по рекурентній формулі:

$$\bar{j}'_n(\zeta)=\bar{j}_{n-1}(\zeta)\exp(\varepsilon_n-\varepsilon_{n-1})-\frac{(n+1)\cdot\bar{j}_n(\varsigma)}{\varsigma} \qquad (36)$$

Нормовані функції Ханкеля і їхні похідні визначаються зі співвідношень:

$$\bar{h}_n^{(1)}(\zeta)=\bar{j}'_n(\zeta)\cdot\exp(-2\varepsilon_n)+i\cdot\bar{y}_n(\zeta), \qquad (37)$$

$$\bar{h}_n^{(1)}{}'(\zeta)=\bar{j}'_n(\zeta)\cdot\exp(-2\varepsilon_n)+i\cdot\bar{y}'_n(\zeta). \qquad (38)$$

Розрахунок нормованих функцій Неймана $\bar{y}_n(\zeta)=y_n(\zeta)\cdot\exp(\varepsilon_n)$ і їхніх похідних $\bar{y}_n$. здійснюється по наступних видозмінених рекурентних співвідношеннях:

$$\bar{y}_n(\zeta)=\frac{2n-1}{\zeta}y_{n-1}(\zeta)\cdot\exp(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)-y_{n-2}(\zeta)\cdot\exp(\varepsilon_{n-2}-\varepsilon_n), \qquad (39)$$

$$\bar{y}'_n(\zeta)=\bar{y}_{n-1}(\zeta)\cdot\exp(\varepsilon_{n-1}-\varepsilon_n)-\frac{(n+1)\cdot\bar{y}_n(\varsigma)}{\varsigma}. \qquad (40)$$

Як приклад розрахунку поля сфокусованого випромінювача великої апертури на рис. 4 представлено залежність амплітуди акустичного тиску від відстані уздовж осі пучка для випромінювача апертури ka = 1000, при куті фокусування α_0 = 60° (див. рис. 2) і рівномірному розподілі швидкості уздовж випромінюючої поверхні: $u=u_0$, для всіх $\alpha\leq\alpha_0$

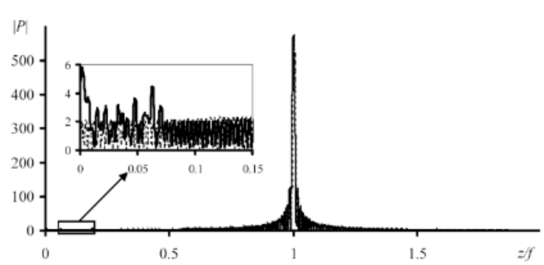

Рис. 4. Амплітуда звукового тиску $|P|=|p|/\rho_0c_0u_0$ уздовж осі пучка (ka = 1000, $\alpha_0=60^o$, розподіл швидкості уздовж випромінюючої поверхні - рівномірний.

Суцільна лінія на рис. 4 відповідає обчисленням, проведеним за допомогою модифікованого методу розкладань, що зрощують, а пунктирна - розрахункам на основі інтеграла Релея [14]:

Використана вище побудова картини акустичних променів випромінювання описує структуру додаткового поля лише якісно. Наприклад, не порозумівається наявність перерозсіяного поля поблизу осі усередині області тіні, наявність інтерференційних смуг і т.д.

Проте, основна цінність використаного в роботі методу розкладань, що зрощуються, полягає в тому, що він дозволяє з високою точністю розрахувати повну дифракційну задачу. Результати проведених у роботі досліджень демонструють істотний вплив увігнутості випромінюючої поверхні на акустичне поле джерела, що фокусує, не тільки в безпосередній близь кості від випромінюючої поверхні, але також на осі пучка й в області, куди після відбиття від увігнутої поверхні попадають промені, випущені елементарними крапковими джерелами із краю випромінювача. Розроблена модифікація методу розкладань, що зрощуються, для опису акустичного поля джерел, у лінійному наближенні дозволяє проводити дослідження просторової структури поля сильно сфокусованих випромінювачів (аж до кутів сходження в 180^o) і випромінювачів великої апертури, аж до розміру порядку ka = 1000. Прикладом таких випромінювачів і є наш винахід [1, 2]

Проведені дослідження структури акустичного поля, перерозсіюваного поверхнею осесиметричних сфокусованих джерел звуку, показують наявність області тіні, де перерозсіюване поле практично відсутнє. Границя цієї області визначається лінією, що обгинає, до однократно відбитого від поверхні променя, випущеного із краю випромінювача. Особливо сильний вплив перерозсіюваного випромінюючою поверхнею акустичного поля позначається на осі симетрії джерела з а його фокусом.

Висновки

Створення акустичних лазерів являє собою принципово новий напрямок в техніці, тому що до винаходу [1, 2] нікому ще не вдавалося получити технічний результат, еквівалентний технічному результату задля відомого світлового лазеру: можливість вузькоспрямованого (кут випромінювання прагне до нуля) надпотужного когерентного (монохроматичного) випромінювання звукових (але не світлових) хвиль. Можливість максимальної концентрації звукової енергії має певні переваги перед можливістю максимальної концентрації світлової енергії в плані використання пропонованих акустичних лазерів. Але ж вона є фактором потенційної небезпеки таких пристроїв!

Створена математична теорія, що описує фізичні процеси при випромінюванні високофокусованої звукової хвилі даним пристроєм. Розроблена модифікація методу розкладань, що зрощуються, для опису акустичного поля високофокусованих джерел, у лінійному наближенні дозволяє проводити дослідження просторової структури поля сильно сфокусованих випромінювачів (аж до кутів сходження в 180^o) і випромінювачів великої апертури, аж до розміру порядку ka = 1000. Акустичний лазер згідно з нашою розробкою [1, 2] є локальним випадком таких випромінювачів (на теперішній час – найбільш типовим), але із прогресом техніки слід очікувати розробки нових конструкцій адекватного призначення?

Розповсюдження їх випромінювання також описує створена нами теорія, цінність якої полягає в можливості апроксимації її під нові, невідомі ще донині конструкції випро мінювачів адекватного призначення. Чисельно досліджене акустичне поле сильне фокусуючих (з кутом сходження впритул до 180°) і широкоапертурних (із хвильовим розміром аж до ka = 1000) увігнутих джерел (у вигляді вищезгаданого акустичного лазера [1, 2]).

Показано, що традиційно використовуване наближення інтеграла Релея дає помітну помилку на осі симетрії джерела й в області простору, куди попадають хвилі, перевідбиті від випромінюючої поверхні.

Отримано аналітичне вираження границі цієї області – каустики [15], утвореної променями, що відповідають однократному відбиттю крайової хвилі від поверхні джерела.

Проблеми безпеки при роботі акустичних лазерів і інших приладів високо сфокусованого випромінювання звуку, небезпечні та шкідливі чинники, що можуть ви явитися при їх дії, обговорювалися на науково-методичної конференції "Безпека життєдіяльності". Харків, 2006. [16]. Монографія В.Е. Абракітова «На шляху до наукових відкриттів» (що на момент підготування цієї роботи находиться у друці, і тому до переліку літературних джерел не включена.), містить частину 8, що повністю присвячена даному питанню.

Епілог

У любому разі, ми раді, що наша первинна ідея, висунута ще в далекому 1994, і запатентована в 1997, послужила основою створення настільки значного й багат ообіцяючого напрямку науки й техніки! Це схоже на паросток - маленький, слабенький, марний – що пробивається собі серед безжалісного пекла й безводних пустель дорогу до світла. Але проходить час - і з маленького, уразливого, паростка, що гнеться під напором нещадного вітру - потім виростає величезне, багатолистяне, розкидисте височенне дерево...

Література

1. Патент № 2077826 (Россия). Акустический лазер Абракитова / Абракитов В.Э. - МПК^6 G10K 5/00; Опубл. 20.04.97, Бюл. № 11.
2. Рішення про видачу патенту по заявці № 93007040 (Україна) від 28.12.96. Акустичний лазер / Абракітов В.Е. - МПК^5 G10K 5/00.
3. Абракітов В.Е. Вперше в світі – акустичний лазер створено в Харкові! // Вестник НТУ "ХПИ". Тем. сборник "Новые решения в современных технологиях". Вып. 47. Х. – С. 83-87.
4. Абракитов В.Э. Перспективы применения акустических лазеров в науке и технике // Тезисы докладов 1-ой региональной конференции ЭКО'96. Дн -ск, 1996.- с. 40.
5. Абракитов В.Э. Акустический лазер - принципиально новый вид излучателей акустического сигнала // Тезисы докладов XXVIII науч.-техн. конференции преп., асп. и сотр. ХГАГХ. Харьков, 1996.- с.85.
6. http://discovery.h11.ru/Abrakitov/acoustic lazer.htm Акустический лазер - изобретение В.Э. Абракитова. (Публикация в Интернет).
7. http://sibpatent.ru/patent.asp?nPubl=2077826&mpkcls=G10K005&sort=2 . Официальная публикация в Интернет патентного документа [1]
8. J.W.S. Rayleigh. The theory of sound. - Dover, New York, v. II. p. 47 (1945).
9. F. Coulouvrat. Continuous field radiated by a geometrically focused transducer: Numeric investigation and comparison with an approximate model. - J. Acoust. Soc. Am., v. 94, № 3, pp. 1663-1675 (1993).
10. В.Ф. Апельцин, А.Г. Кюркчан. Аналитические свойства волновых полей. - М.: МГУ (1990).
11. Ф. Олвер. Асимптотика и специальные функции. - М.: «Наука» (1990).
12. Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш. Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6 -го нем. изд. М.: «Наука» (1968).
13. W.H. Press, S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P. Flannery. Numerical Recipes in Fortran: the art of scientific computing. 2nd ed. - Cambridge Univ. Press, pp. 223 – 229 (1994).
14. H.T. O'Neil. Theory of focusing radiators. - J. Acoust. Soc. Am., v. 21, № 5, pp. 516-526 (1949).
15. Абракітов В.Е. Каустики хвильових фронтів, і їхні метаморфози // Строительство, материаловедение, машиностроение / Сб. научн. трудов. Вып. 28. – Дн-ск, ПГАСиА, 2004. – с. 237-241.
16. Абракітов В.Е. Створення акустичних лазерів - новий напрямок в науці і техніці // Тези доповідей науково-методичної конференції "Безпека життєдіяльності". Харків, 2006. - С. 6 - 7.